**2017年河南省许昌市高考理科数学二模试卷（Word版含解析）**

**一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每个小题给出的四个选项中，有且只有一项符合题目要求.**

1．（5分）（2017•许昌二模）已知集合A={x|x2﹣2x﹣3＞0}，B={x|lg（x﹣2）≤0}，则（∁RA）∪B=（　　）

A．（﹣1，3） B．（2，3） C．（2，3] D．[﹣1，3]

【考点】交、并、补集的混合运算．菁优网版权所有

【专题】集合思想；定义法；不等式的解法及应用；集合．

【分析】解不等式求出集合A、B，根据补集与并集的定义计算即可．

【解答】解：集合A={x|x2﹣2x﹣3＞0}={x|x＜﹣1或x＞3}，

B={x|lg（x﹣2）≤0}={x|0＜x﹣2≤1}={x|2＜x≤3}，

则∁RA={x|﹣1≤x≤3}，

∴（∁RA）∪B={x|﹣1≤x≤3}=[﹣1，3]．

故选：D．

【点评】本题考查了集合的运算与解不等式的应用问题，是基础题目．

2．（5分）（2017•许昌二模）欧拉（Leonhard Euler，国籍瑞士）是科学史上最多产的一位杰出的数学家，他发明的公式eix=cosx+isinx（i为虚数单位），将指数函数的定义域扩大到复数，建立了三角函数和指数函数的关系，这个公式在复变函数理论中占有非常重要的地位，被誉为“数学中的天桥”．根据此公式可知，表示的复数e﹣iπ在复平面内位于

（　　）

A．第一象限 B．在实数轴上 C．第三象限 D．第四象限

【考点】复数代数形式的混合运算．菁优网版权所有

【专题】方程思想；转化思想；数系的扩充和复数．

【分析】复数e﹣iπ=cos（﹣π）+isin（﹣π）=﹣1，即可判断出结论．

【解答】解：复数e﹣iπ=cos（﹣π）+isin（﹣π）=﹣1，位于复平面内的实数轴上．

故选：B．

【点评】本题考查了欧拉公式、复数的三角形式，考查了推理能力与计算能力，属于基础题．

3．（5分）（2017•许昌二模）下列命题正确的是（　　）

A．∃x0∈R，sinx0+cosx0=菁优网-jyeoo

B．∀x≥0且x∈R，2x＞x2

C．已知a，b为实数，则a＞2，b＞2是ab＞4的充分条件

D．已知a，b为实数，则a+b=0的充要条件是菁优网-jyeoo=﹣1

【考点】命题的真假判断与应用．菁优网版权所有

【专题】转化思想；定义法；简易逻辑．

【分析】根据sinx+cosx=菁优网-jyeoosin（x+菁优网-jyeoo）≤菁优网-jyeoo＜菁优网-jyeoo，判断A错误；

举例说明x=2时2x=x2=4，判断B错误；

根据a＞2，b＞2时ab＞4，判断充分性成立C正确；

举例说明a=b=0时菁优网-jyeoo=﹣1不成立，判断D错误．

【解答】解：对于A，∀x∈R，sinx+cosx=菁优网-jyeoosin（x+菁优网-jyeoo）≤菁优网-jyeoo＜菁优网-jyeoo正确，

∴该命题的否定是假命题，A错误；

对于B，当x=2时，2x=x2=4，∴B错误；

对于C，a，b为实数，当a＞2，b＞2时，ab＞4，充分性成立，

是充分条件，C正确；

对于D，a，b为实数，a+b=0时，若a=b=0，则菁优网-jyeoo=﹣1不成立，

∴不是充要条件，D错误．

故选：C．

【点评】本题考查了命题真假的判断问题，也考查了简易逻辑的应用问题，是基础题目．

4．（5分）（2017•许昌二模）已知圆O：x2+y2=4（O为坐标原点）经过椭圆C：菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=1（a＞b＞0）的短轴端点和两个焦点，则椭圆C的标准方程为（　　）

A．菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=1 B．菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=1

C．菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=1 D．菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=1

【考点】椭圆的简单性质．菁优网版权所有

【专题】转化思想；待定系数法；圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】根据圆O：x2+y2=4（O为坐标原点）经过椭圆C：菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=1（a＞b＞0）的短轴端点和两个焦点，可得b，c，a，

【解答】解：∵圆O：x2+y2=4（O为坐标原点）经过椭圆C：菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=1（a＞b＞0）的短轴端点和两个焦点，

∴b=2，c=2，则a2=b2+c2=8．

∴椭圆C的标准方程为：菁优网-jyeoo，

故选：B

【点评】本题考查了椭圆的方程，属于基础题．

5．（5分）（2017•许昌二模）已知等差数列{an}满足a1=1，an+2﹣an=6，则a11等于（　　）

A．31 B．32 C．61 D．62

【考点】等差数列的通项公式．菁优网版权所有

【专题】计算题；方程思想；定义法；等差数列与等比数列．

【分析】由等差数列的性质依次求出a3，a5，a7，a9，a11．

【解答】解：∵等差数列{an}满足a1=1，an+2﹣an=6，

∴a3=6+1=7，

a5=6+7=13，

a7=6+13=19，

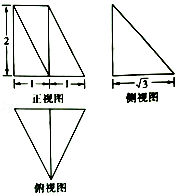
a9=6+19=25，

a11=6+25=31．

故选：A．

【点评】本题考查等差数列的第11项的求法，是基础题，解题时要认真审题，注意等差数列的性质的合理运用．

6．（5分）（2017•许昌二模）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为（　　）



A．3菁优网-jyeoo B．菁优网-jyeoo C．菁优网-jyeoo菁优网-jyeoo D．菁优网-jyeoo菁优网-jyeoo

【考点】由三视图求面积、体积．菁优网版权所有

【专题】综合题；转化思想；演绎法；空间位置关系与距离．

【分析】由三视图可得，几何体为底面为正视图，高为菁优网-jyeoo的四棱锥，即可求出几何体的体积．

【解答】解：由三视图可得，几何体为底面为正视图，高为菁优网-jyeoo的四棱锥，体积为菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，

故选B．

【点评】本题考查由三视图求面积、体积，考查学生的计算能力，确定几何体的形状是关键．

7．（5分）（2017•许昌二模）已知函数f（x）=菁优网-jyeoo的最大值为M，最小值为m，则M+m等于（　　）

A．0 B．2 C．4 D．8

【考点】函数的最值及其几何意义．菁优网版权所有

【专题】计算题；函数思想；转化法；函数的性质及应用．

【分析】设g（x）=菁优网-jyeoo，得到g（x）为奇函数，得到g（x）max+g（x）min=0，相加可得答案．

【解答】解：f（x）=菁优网-jyeoo=2+菁优网-jyeoo，

设g（x）=菁优网-jyeoo，

∴g（﹣x）=﹣g（x），

∴g（x）为奇函数，

∴g（x）max+g（x）min=0

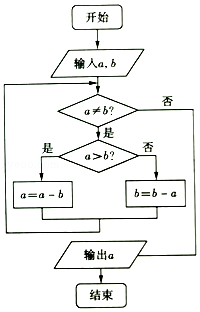
∵M=f（x）max=2+g（x）max，m=f（x）min=2+g（x）min，

∴M+m=2+g（x）max+2+g（x）min=4，

故选：C

【点评】本题主要考查了利用函数的奇偶性求函数的最大值与最小值，属于中档题．

8．（5分）（2017•许昌二模）如图所示的程序框图的算法思路来源于我国古代数学名著《九章算术》中的“更相减损术”，执行该程序框图，若输入a，b的值分别是21，28，则输出a的值为（　　）



A．14 B．7 C．1 D．0

【考点】程序框图．菁优网版权所有

【专题】计算题；图表型；试验法；算法和程序框图．

【分析】由循环结构的特点，先判断，再执行，分别计算出当前的a，b的值，即可得到结论．

【解答】解：由a=21，b=28，不满足a＞b，

则b变为28﹣21=7，

由b＜a，则a变为21﹣7=14，

由b＜a，则a变为14﹣7=7，

由a=b=7，

则输出的a=7．

故选：B．

【点评】本题考查算法和程序框图，主要考查循环结构的理解和运用，以及赋值语句的运用，属于基础题．

9．（5分）（2017•许昌二模）已知函数y=x+1+lnx在点A（1，2）处的切线l，若l与二次函数y=ax2+（a+2）x+1的图象也相切，则实数a的取值为（　　）

A．12 B．8 C．0 D．4

【考点】利用导数研究曲线上某点切线方程．菁优网版权所有

【专题】函数思想；转化思想；分析法；导数的概念及应用．

【分析】求出y=x+1+lnx的导数，求得切线的斜率，可得切线方程，再由于切线与曲线y=ax2+（a+2）x+1相切，有且只有一切点，进而可联立切线与曲线方程，根据△=0得到a的值．

【解答】解：y=x+1+lnx的导数为y′=1+菁优网-jyeoo，

曲线y=x+1+lnx在x=1处的切线斜率为k=2，

则曲线y=x+1+lnx在x=1处的切线方程为y﹣2=2x﹣2，即y=2x．

由于切线与曲线y=ax2+（a+2）x+1相切，

y=ax2+（a+2）x+1可联立y=2x，

得ax2+ax+1=0，

又a≠0，两线相切有一切点，

所以有△=a2﹣4a=0，

解得a=4．

故选：D．

【点评】本题考查导数的运用：求切线方程，主要考查导数的几何意义：函数在某点处的导数即为曲线在该点处的导数，设出切线方程运用两线相切的性质是解题的关键．

10．（5分）（2017•许昌二模）已知△ABC的三个顶点的坐标为A（0，1），B（1，0），C（0，﹣2），O为坐标原点，动点M满足|菁优网-jyeoo|=1，则|菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo|的最大值是（　　）

A．菁优网-jyeoo B．菁优网-jyeoo C．菁优网-jyeoo﹣1 D．菁优网-jyeoo﹣1

【考点】平面向量的坐标运算．菁优网版权所有

【专题】综合题；转化思想；综合法；平面向量及应用．

【分析】设点M的坐标是（x，y），由两点之间的距离公式化简|菁优网-jyeoo|=1，判断出动点M的轨迹，由向量的坐标运算求出菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo，表示出|菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo|并判断几何意义，转化为圆外一点与圆上点的距离最值问题，即可求出答案．

【解答】解：设点M的坐标是（x，y），

∵C（0，﹣2），且|菁优网-jyeoo|=1，

∴菁优网-jyeoo，则x2+（y+2）2=1，

即动点M的轨迹是以C为圆心、1为半径的圆，

∵A（0，1），B（1，0），

∴菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=（x+1，y+1），

则|菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo|=菁优网-jyeoo，几何意义表示：

点M（x，y）与点A（﹣1，﹣1）之间的距离，即圆C上的点与点A（﹣1，﹣1）的距离，

∵点A（﹣1，﹣1）在圆C外部，

∴|菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo|的最大值是|AC|+1=菁优网-jyeoo+1=菁优网-jyeoo，

故选A．

【点评】本题考查向量的坐标运算、向量的模，动点的轨迹以及轨迹方程，两点之间的距离公式，以及圆外一点与圆上点的距离最值问题，考查转化思想．

11．（5分）（2017•湖南二模）已知双曲线C：菁优网-jyeoo﹣菁优网-jyeoo=1（a＞0，b＞0）的左、右焦点分别为F1，F2，O为坐标原点，点P是双曲线在第一象限内的点，直线PO，PF2分别交双曲线C的左、右支于另一点M，N，若|PF1|=2|PF2|，且∠MF2N=120°，则双曲线的离心率为（　　）

A．菁优网-jyeoo B．菁优网-jyeoo C．菁优网-jyeoo D．菁优网-jyeoo

【考点】直线与椭圆的位置关系．菁优网版权所有

【专题】数形结合；数形结合法；圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】由题意，|PF1|=2|PF2|，|PF1|﹣|PF2|=2a，可得|PF1|=4a，|PF2|=2a，由∠MF2N=120°，可得∠F1PF2=120°，由余弦定理可得4c2=16a2+4a2﹣2•4a•2a•cos120°，即可求出双曲线C的离心率．

【解答】解：由题意，|PF1|=2|PF2|，

由双曲线的定义可得，|PF1|﹣|PF2|=2a，

可得|PF1|=4a，|PF2|=2a，

由四边形PF1MF2为平行四边形，

又∠MF2N=120°，可得∠F1PF2=120°，

在三角形PF1F2中，由余弦定理可得

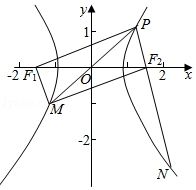
4c2=16a2+4a2﹣2•4a•2a•cos120°，

即有4c2=20a2+8a2，即c2=7a2，

可得c=菁优网-jyeooa，

即e=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo．

故选B．



【点评】本题考查双曲线C的离心率，注意运用双曲线的定义和三角形的余弦定理，考查学生的计算能力，属于中档题．

12．（5分）（2017•许昌二模）定义在R上的函数f（x），当x∈[0，2]时，f（x）=4（1﹣|x﹣1|），且对于任意实数x∈[2n﹣2，2n+1﹣2]（n∈N\*，n≥2），都有f（x）=菁优网-jyeoof（菁优网-jyeoo﹣1）．若g（x）=f（x）﹣logax有且只有三个零点，则a的取值范围是（　　）

A．[2，10] B．[菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo] C．（2，10） D．[2，10）

【考点】根的存在性及根的个数判断；函数零点的判定定理．菁优网版权所有

【专题】数形结合；方程思想；转化思想；函数的性质及应用．

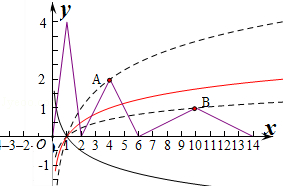
【分析】由g（x）=f（x）﹣logax=0，得f（x）=logax，分别作出函数f（x）和y=logax的图象，利用数形结合即可得到结论．

【解答】解：当x∈[0，2]时，f（x）=4（1﹣|x﹣1|），

当n=2时，x∈[2，6]，此时菁优网-jyeoo﹣1∈[0，2]，则f（x）=菁优网-jyeoof（菁优网-jyeoo﹣1）=菁优网-jyeoo×4（1﹣|菁优网-jyeoo﹣1﹣1|）=2（1﹣|菁优网-jyeoo﹣2|），

当n=3时，x∈[6，14]，此时菁优网-jyeoo﹣1∈[2，6]，则f（x）=菁优网-jyeoof（菁优网-jyeoo﹣1）=菁优网-jyeoo×2（1﹣|菁优网-jyeoo﹣菁优网-jyeoo|）=1﹣|菁优网-jyeoo﹣菁优网-jyeoo|，

由g（x）=f（x）﹣logax=0，得f（x）=logax，分别作出函数f（x）和y=logax的图象，



若0＜a＜1，则此时两个函数图象只有1个交点，不满足条件．

若a＞1，当对数函数图象经过A时，两个图象只有2个交点，当图象经过点B时，两个函数有4个交点，

则要使两个函数有3个交点，则对数函数图象必须在A点以下，B点以上，

∵f（4）=2，f（10）=1，∴A（4，2），B（10，1），

即满足菁优网-jyeoo，

即菁优网-jyeoo，解得菁优网-jyeoo，

即2＜a＜10，

故选：C．

【点评】本题主要考查分段函数的应用，利用函数零点和方程之间的关系，将条件转化为两个函数交点问题，利用数形结合是解决本题的关键．综合性较强，有一点的难度．

**二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.**

13．（5分）（2017•许昌二模）已知实数x，y满足条件菁优网-jyeoo若目标函数z=2x+y的最小值为3，则其最大值为　7　．

【考点】简单线性规划．菁优网版权所有

【专题】计算题；数形结合；方程思想；转化思想；不等式．

【分析】作出不等式组对应的平面区域，利用目标函数z=2x+y的最小值为3，建立条件关系即可求出m的值，然后求解最大值即可．

【解答】解：目标函数z=2x+y的最小值为3，

∴y=﹣2x+z，要使目标函数z=﹣2x+y的最小值为3，

作出不等式组对应的平面区域如图：

则目标函数经过点A截距最小，

由菁优网-jyeoo，解得A（2，﹣1），同时A也在直线﹣2x+y+m=0，

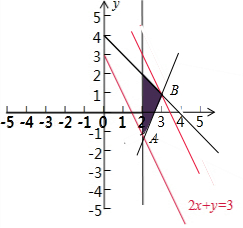
解得m=5，

目标函数z=2x+y经过B时取得最大值

由菁优网-jyeoo，解得B（3，1），

z的最大值为：7．

故答案为：7．



【点评】本题主要考查线性规划的应用，根据目标函数z=3x+y的最小值为5，确定平面区域的位置，利用数形结合是解决本题的关键．

14．（5分）（2017•许昌二模）设二项式菁优网-jyeoo展开式中的常数项为a，则菁优网-jyeoo的值为　﹣菁优网-jyeoo　．

【考点】二项式系数的性质．菁优网版权所有

【专题】方程思想；转化思想；导数的综合应用；二项式定理．

【分析】利用二项式定理的通项公式可得a，再利用微积分基本定理即可得出．

【解答】解：二项式菁优网-jyeoo展开式中的通项公式：Tr+1=菁优网-jyeoo菁优网-jyeoo=（﹣1）r菁优网-jyeoo菁优网-jyeoo．

令6﹣菁优网-jyeoo=0，解得r=4．

∴常数项a=菁优网-jyeoo=15，

则菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoocos3xdx=菁优网-jyeoo=﹣菁优网-jyeoo．

故答案为：﹣菁优网-jyeoo．

【点评】本题考查了二项式定理的通项公式、微积分基本定理，考查了推理能力与计算能力，属于中档题．

15．（5分）（2017•许昌二模）已知A，B，C是球O的球面上三点，且菁优网-jyeoo为该球面上的动点，球心O到平面ABC的距离为球半径的一半，则三棱锥D﹣ABC体积的最大值为　菁优网-jyeoo　．

【考点】棱柱、棱锥、棱台的体积．菁优网版权所有

【专题】计算题；对应思想；数形结合法；立体几何．

【分析】由题意画出图形，求出三角形ABC外接圆的半径，设出球的半径，利用直角三角形中的勾股定理求得球的半径，则三棱锥D﹣ABC体积的最大值可求．

【解答】解：如图，在△ABC中，∵菁优网-jyeoo，

∴由余弦定理可得cosA=菁优网-jyeoo，则A=120°，

∴sinA=菁优网-jyeoo．

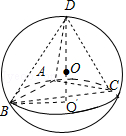
设△ABC外接圆的半径为r，则菁优网-jyeoo，得r=3．

设球的半径为R，则菁优网-jyeoo，解得菁优网-jyeoo．

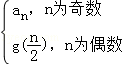
∵菁优网-jyeoo，

∴三棱锥D﹣ABC体积的最大值为菁优网-jyeoo．

故答案为：菁优网-jyeoo．



【点评】本题主要考查空间几何体的体积等基础知识，考查空间想象能力、推理论证能力、运算求解能力，考查化归与转化思想、数形结合思想等，是中档题．

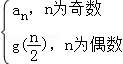
16．（5分）（2017•许昌二模）已知函数fn（x）=a1x+a2x2+a3x3+…+anxn，且fn（﹣1）=（﹣1）nn，n∈N\*，设函数g（n）=，若bn=g（2n+4），n∈N\*，则数列{bn}的前n（n≥2）项和Sn等于　菁优网-jyeoo　．

【考点】数列的求和．菁优网版权所有

【专题】转化思想；转化法；函数的性质及应用；等差数列与等比数列．

【分析】由分段函数，求得bn=a菁优网-jyeoo，再由函数fn（x），求得n=1时，a1=1，将n换为n﹣1，作差可得an=2n﹣1，进而得到

bn=2n﹣1+1，再由数列的求和方法：分组求和，结合等比数列的求和公式，计算即可得到所求和．

【解答】解：由函数g（n）=，

可得bn=g（2n+4）=g（2n﹣1+2）=g（2n﹣2+1）=a菁优网-jyeoo，

由函数fn（x）=a1x+a2x2+a3x3+…+anxn，且fn（﹣1）=（﹣1）nn，

可得﹣a1+a2﹣a3+…+an（﹣1）n=（﹣1）nn，①

n=1时，﹣a1=﹣1，可得a1=1；

n≥2时，﹣a1+a2﹣a3+…+an﹣1（﹣1）n﹣1=（﹣1）n﹣1（n﹣1），②

①﹣②可得an（﹣1）n=（﹣1）nn﹣（﹣1）n﹣1（n﹣1），

化简可得an=2n﹣1，对n=1也成立．

bn=g（2n+4），可得b1=g（6）=g（3）=a3=5，

b2=g（8）=g（4）=g（2）=g（1）=a1=1，

b3=g（12）=g（6）=g（3）=a3=5，

则bn=a菁优网-jyeoo=2n﹣1+1，n≥3，

则数列{bn}的前n（n≥2）项和Sn等于5+1+（4+…+2n﹣1）+n﹣2

=6+4•菁优网-jyeoo+n﹣2=2n+n．

故答案为：菁优网-jyeoo．

【点评】本题考查数列的求和：分组求和，注意运用等比数列的求和公式，考查分段函数的应用，考查转化思想和化简整理的运算能力，属于中档题．

**三、解答题：本大题共5小题，共70分.解答应写出必要的文字说明或推理、验算过程.**

17．（12分）（2017•许昌二模）已知向量菁优网-jyeoo=（2cosx，sinx），菁优网-jyeoo=（cosx，2菁优网-jyeoocosx），函数f（x）=菁优网-jyeoo•菁优网-jyeoo﹣1．

（Ⅰ）求函数f（x）的单调递减区间；

（Ⅱ）在锐角△ABC中，内角A、B、C的对边分别为a，b，c，tanB=菁优网-jyeoo，对任意满足条件的A，求f（A）的取值范围．

【考点】余弦定理；平面向量数量积的运算．菁优网版权所有

【专题】函数思想；转化法．

【分析】（Ⅰ）根据函数f（x）=菁优网-jyeoo•菁优网-jyeoo﹣1．利用向量的数量积的运算求解f（x），结合三角函数的性质求解单调性即可．

（Ⅱ）tanB=菁优网-jyeoo求解．

【解答】解：（Ⅰ）向量菁优网-jyeoo=（2cosx，sinx），菁优网-jyeoo=（cosx，2菁优网-jyeoocosx），

函数f（x）=菁优网-jyeoo•菁优网-jyeoo﹣1．

则f（x）=2cos2x+2菁优网-jyeoosinxcosx﹣1=菁优网-jyeoosin2x+cos2x=2sin（2x菁优网-jyeoo）

由菁优网-jyeoo，

解得：菁优网-jyeoo≤x≤菁优网-jyeoo，（k∈Z）．

故得函数f（x）的单调递减区间为[菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo]，（k∈Z）

（Ⅱ）由tanB=菁优网-jyeoo，即：菁优网-jyeoo，

∵cosB=菁优网-jyeoo

∴sinB=菁优网-jyeoo．

又∵△ABC是锐角，

∴B=菁优网-jyeoo．

则菁优网-jyeoo＜A＜菁优网-jyeoo

由（Ⅰ）可知f（A）=2sin（2A菁优网-jyeoo）

那么：2A菁优网-jyeoo∈（菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo）

则sin（2A菁优网-jyeoo）∈（菁优网-jyeoo，1）

故得f（A）的取值范围是（﹣1，2）

【点评】本题考查了向量的数量积的运算和余弦定理的运用以及利用三角函数的有界限求解取值范围的问题．属于中档题．

18．（12分）（2017•许昌二模）某品牌的汽车4S店，对最近100例分期付款购车情况进行统计，统计结果如表所示，已知分9期付款的频率为0.4；该店经销一辆该品牌的汽车．若顾客分3期付款，其利润为1万元；分6期或9期付款，其利润为2万元；分12期付款，其利润为3万元．

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 付款方式 | 分3期 | 分6期 | 分9期 | 分12期 |
| 频数 | 20 | 20 | a | b |

（1）若以表中计算出的频率近似替代概率，从该店采用分期付款购车的顾客（数量较大）中随机抽取3位顾客，求事件A：“至多有1位采用分6期付款”的概率P（A）；

（2）按分层抽样的方式从这100位顾客中抽出5人，再从抽出的5人中随机抽取3人，记该店在这3人身上赚取的总利润为随机变量η，求η的分布列及数学期望E（η）．

【考点】离散型随机变量的期望与方差；列举法计算基本事件数及事件发生的概率．菁优网版权所有

【专题】分类讨论；方程思想；转化思想；概率与统计．

【分析】（1）由菁优网-jyeoo=0.4，得a=40，20+a+20+b=100，解得b．记分期付款的期数为ξ，依题意即可得出其概率．进而定点“购买该品牌汽车的3为顾客中至多有1位采用3期付款”的概率P（A）．

（2）按分层抽样的方式从这100位顾客中抽出5人，则顾客分3期付款与分6期付款的各为1人，分9期付款的为2人，分12期付款为1人．则η的可能取值为5，6，7．利用相互独立与互斥事件的概率计算公式可得其概率，进而得到分布列与数学期望．

【解答】解：（1）由菁优网-jyeoo=0.4，得a=40，

∵20+a+20+b=100，∴b=20

记分期付款的期数为ξ，依题意得：

P（ξ=3）=菁优网-jyeoo=0.2，P（ξ=6）=菁优网-jyeoo=0.2，P（ξ=9）=菁优网-jyeoo=0.4，P（ξ=12）=菁优网-jyeoo=0.2．

则“购买该品牌汽车的3为顾客中至多有1位采用3期付款”的概率

P（A）=菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=0.896．

（2）按分层抽样的方式从这100位顾客中抽出5人，则顾客分3期付款与分6期付款的各为1人，分9期付款的为2人，分12期付款为1人．则η的可能取值为5，6，7．

P（η=5）=P（ξ=3）×P（ξ=6）×P（ξ=9）+P（ξ=3）×P（ξ=9）×P（ξ=9）=菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo．

P（η=6）=P（ξ=3）×P（ξ=6）×P（ξ=12）+P（ξ=6）×P（ξ=9）×P（ξ=9）+P（ξ=3）×P（ξ=9）×P（ξ=12）=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，

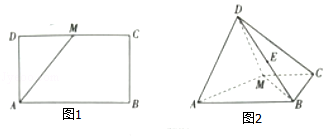
P（η=7）=P（ξ=6）×P（ξ=9）×P（ξ=12）+P（ξ=9）×P（ξ=9）×P（ξ=12）=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo．

列表如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| η | 5 | 6 | 7 |
| P | 0.3 | 0.4 | 0.3 |

所以η的数学期望E（η）=5×0.3+6×0.4+7×0.3=6（万元）．

【点评】本题考查概率与频率的关系、离散型随机变量的分布列与数学期望的求法、相互独立与互斥事件的概率计算公式，考查推理能力与计算能力，属于中档题．

19．（12分）（2017•许昌二模）如图所示，已知长方体ABCD中，菁优网-jyeoo为DC的中点．将△ADM沿AM折起，使得AD⊥BM．

（1）求证：平面ADM⊥平面ABCM；

（2）是否存在满足菁优网-jyeoo的点E，使得二面角E﹣AM﹣D为大小为菁优网-jyeoo．若存在，求出相应的实数t；若不存在，请说明理由．

【考点】与二面角有关的立体几何综合题；平面与平面垂直的判定．菁优网版权所有

【专题】证明题；转化思想；向量法；空间位置关系与距离．

【分析】（1）推导出BM⊥AM，AD⊥BM，从而BM⊥平面ADM，由此能证明平面ADM⊥平面ABCM．

（2）以M为原点，MA为x轴，MB为y轴，过M作平面ABCM的垂线为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法能求出存在满足菁优网-jyeoo的点E，使得二面角E﹣AM﹣D为大小为菁优网-jyeoo，并能求出相应的实数t的值．

【解答】证明：（1）∵长方形ABCD中，AB=2AD=2菁优网-jyeoo，M为DC的中点，

∴AM=BM=2，AM2+BM2=AB2，∴BM⊥AM，

∵AD⊥BM，AD∩AM=A，∴BM⊥平面ADM，

又BM⊂平面ABCM，∴平面ADM⊥平面ABCM．

解：（2）以M为原点，MA为x轴，MB为y轴，过M作平面ABCM的垂线为z轴，

建立空间直角坐标系，

则A（2，0，0），B（0，2，0），D（1，0，1），M（0，0，0），

菁优网-jyeoo=（0，2，0），菁优网-jyeoo=（1，﹣2，1），菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo=（t，2﹣2t，1），

设平面AME的一个法向量为菁优网-jyeoo=（x，y，z），

则菁优网-jyeoo，

取y=t，得菁优网-jyeoo=（0，t，2t﹣2），

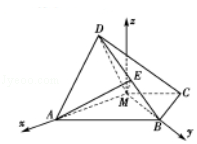
由（1）知平面AMD的一个法向量菁优网-jyeoo=（0，1，0），

∵二面角E﹣AM﹣D为大小为菁优网-jyeoo，

∴cos菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，

解得t=菁优网-jyeoo或t=2（舍），

∴存在满足菁优网-jyeoo的点E，使得二面角E﹣AM﹣D为大小为菁优网-jyeoo，相应的实数t的值为菁优网-jyeoo．



【点评】本题考查面面垂直的证明，考查满足二面角的大小的实数值是否存在的判断与求法，是中档题，解题时要认真审题，注意向量法的合理运用．

20．（12分）（2017•许昌二模）设抛物线的顶点在坐标原点，焦点F在y轴正半轴上，过点F的直线交抛物线于A，B两点，线段AB的长是8，AB的中点到x轴的距离是3．

（1）求抛物线的标准方程；

（2）设直线m在y轴上的截距为6，且与抛物线交于P，Q两点，连结QF并延长交抛物线的准线于点R，当直线PR恰与抛物线相切时，求直线m的方程．

【考点】直线与抛物线的位置关系．菁优网版权所有

【专题】方程思想；设而不求法；转化法；圆锥曲线的定义、性质与方程．

【分析】（1）设抛物线的方程为x2=2py（p＞0），求出准线方程，运用抛物线的定义和中位线定理，可得2（3+菁优网-jyeoo）=8，解得p，即可得到抛物线的方程；

（2）设直线PQ的方程为y=kx+6，代入抛物线的方程，运用韦达定理，结合导数求得切线的斜率，再由两点的方斜率公式，以及三点共线的条件：斜率相等，化简整理解方程可得k的值，客人得到直线m的方程．

【解答】解：（1）设抛物线的方程为x2=2py（p＞0），

准线方程为y=﹣菁优网-jyeoo，

由抛物线的定义可得|AF|+|BF|=|AB|=2（3+菁优网-jyeoo）=8，

解得p=2，

即有抛物线的方程为x2=4y；

（2）设直线PQ的方程为y=kx+6，代入抛物线的方程，可得

x2﹣4kx﹣24=0，

设P（x1，菁优网-jyeoo），Q（x2，菁优网-jyeoo），

可得x1+x2=4k，x1x2=﹣24，

由y=菁优网-jyeoox2的导数为y′=菁优网-jyeoox，

设R（t，﹣1），可得kPR=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoox1，

可得t=菁优网-jyeoox1﹣菁优网-jyeoo，

再由Q，F，R共线，可得菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，

消去t，可得菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，

即有16x1x2=4（x12+x22）﹣16﹣（x1x2）2，

即有16×（﹣24）=4[（4k）2+2×24]﹣16﹣242，

解方程可得k=±菁优网-jyeoo，

即有直线m的方程为y=±菁优网-jyeoox+6．

【点评】本题考查抛物线的方程的求法，注意运用定义法和方程思想，考查直线方程和抛物线方程联立，运用韦达定理和导数，由两点的斜率公式，以及三点共线的条件：斜率相等，考查化简整理的运算能力，属于中档题．

21．（12分）（2017•许昌二模）已知函数菁优网-jyeoo．

（1）当a=1时，求函数f（x）的单调区间；

（2）若﹣1＜x＜1时，均有f（x）≤0成立，求实数a的取值范围．

【考点】利用导数求闭区间上函数的最值；利用导数研究函数的单调性．菁优网版权所有

【专题】转化思想；综合法；导数的综合应用．

【分析】（Ⅰ）当a=1时，f（x）的定义域为（﹣1，1）∪（1，+∞），

求出f′（x）=菁优网-jyeoo，即可求单调区间；

（Ⅱ）f′（x）=菁优网-jyeoo，

分（1）a≤0，（2）当a＞0，讨论单调性及最值即可．

【解答】解：（Ⅰ）当a=1时，f（x）的定义域为（﹣1，1）∪（1，+∞），

f′（x）=菁优网-jyeoo，

当﹣1＜x＜0或＞3时，f′（x）＞0，当0＜x＜1或1＜x＜3，f′（x）＜0，

所以函数f（x）的增区间为（﹣1，0），（3，+∞），减区间为（0，1），（1，3）

（Ⅱ）f′（x）=菁优网-jyeoo，

当a≤0时，f′（x）＞0恒成立，故0＜x＜1时，f（x）＞f（0）=0，不符合题意．

当a＞0时，由f′（x）=0，得x1=菁优网-jyeoo，x2=菁优网-jyeoo．

若0＜a＜1，此时0＜x1＜1，对0＜x＜x1，有f′（x）＞0，f（x）＞f（0）=0，不符合题意．

若a＞1，此时﹣1＜x1＜0，对x1＜x＜0，有f′（x）＜0，f（x）＞f（0）=0，不符合题意．

若a=1，由（Ⅰ）知，函数f（x）在x=0处取得最大值0，符合题意，

综上实数a的取值为1．

【点评】本题考查了导数的综合应用，属于难题，

**[选修4-4：参数方程与极坐标系]**

22．（10分）（2017•许昌二模）在平面直角坐标系xoy中，曲线C1的参数方程为菁优网-jyeoo（θ为参数），以坐标原点O为极点，x轴的正半轴为极轴，与直角坐标系xoy取相同的单位长度建立极坐标系，曲线C2的极坐标方程为ρ=2cosθ﹣4sinθ．

（1）化曲线C1，C2的方程为普通方程，并说明它们分别表示什么曲线；

（2）设曲线C2与x轴的一个交点的坐标为P（m，0）（m＞0），经过点P作斜率为1的直线，l交曲线C2于A，B两点，求线段AB的长．

【考点】参数方程化成普通方程．菁优网版权所有

【专题】转化思想；参数法．

【分析】（1）根据sin2θ+cos2θ=1消去曲线C1的参数θ可得普通方程；根据ρcosθ=x，ρsinθ=y，ρ2=x2+y2，进行代换即得曲线C2的普通方程；

（2）令曲线C2的y=0，求解P的坐标，可得过P的直线方程，参数方程的几何意义求解即可．

【解答】解：（1）曲线C1的参数方程为菁优网-jyeoo，消去参数可得：菁优网-jyeoo，表示焦点在y轴上的椭圆方程．

曲线C2的极坐标方程为ρ=2cosθ﹣4sinθ，可得ρ2=2ρcosθ﹣4ρsinθ，

∴x2+y2=2x﹣4y，整理得（x﹣1）2+（y+2）2=5，表示以（1，﹣2）为圆心，半径r=5的圆．

（2）曲线C2与x轴的一个交点的坐标为P（m，0）（m＞0），令y=0，解得x=2，

∴P（2，0），可得直线l：y=x﹣2．

将曲线C1的参数方程带入直线l可得：菁优网-jyeoosinθ=2cosθ﹣2．

整理可得：cos（菁优网-jyeoo）=菁优网-jyeoo，即θ=2kπ或菁优网-jyeoo，（k∈Z）．

那么：A（2，0），B（﹣1，﹣3），

∴|AB|=菁优网-jyeoo．

【点评】本题考查参数方程、极坐标方程、普通方程的互化，以及直线参数方程的几何意义应用的思想，属于中档题．

**[选修4-5：不等式选讲]**

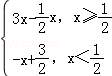
23．（2017•许昌二模）已知函数菁优网-jyeoo的最小值为m．

（1）求m的值；

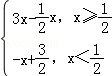
（2）若a，b，c是正实数，且a+b+c=m，求证：2（a3+b3+c3）≥ab+bc+ca﹣3abc．

【考点】不等式的证明；绝对值三角不等式．菁优网版权所有

【专题】计算题；转化思想；综合法；不等式．

【分析】（1）根据题意，将f（x）的解析式写成分段函数的形式可得f（x）=，结合函数的单调性分析可得f（x）min=f（菁优网-jyeoo）=1，即可得m的值；

（2）先用作差法证明a3+b3≥a2b+ab2，再结合基本不等式分析可得a3+b3≥a2b+ab2=ab（a+b）=ab（1﹣c）=ab﹣abc，①；同理可以证明b3+c3≥bc﹣abc，②和a3+c3≥ac﹣abc，②；将三个式子相加即可得答案．

【解答】解：（1）根据题意，函数菁优网-jyeoo=，

分析可得f（x）min=f（菁优网-jyeoo）=1，

即m=1；

（2）证明：由（1）可得a+b+c=1，

由于（a3+b3）﹣a2b﹣ab2=（a2﹣b2）（a﹣b）=（a﹣b）2（a+b），

又由a，b，c是正实数，

则有（a3+b3）﹣a2b﹣ab2=（a﹣b）2（a+b）≥0，

即a3+b3≥a2b+ab2=ab（a+b）=ab（1﹣c）=ab﹣abc，①

同理可得：b3+c3≥bc﹣abc，②

a3+c3≥ac﹣abc，③

①+②+③可得：2（a3+b3+c3）≥ab+bc+ca﹣3abc．

【点评】本题考查不等式的证明以及分段函数的性质，关键是求出m的值．