**2015年吉林一中高一（下）奥训班期中数学试卷（Word版含解析）**

**一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分．）**

1．（5分）（2010秋•山东校级期末）函数菁优网-jyeoo的导数是（　　）

A．菁优网-jyeoo B．菁优网-jyeoo

C．菁优网-jyeoo D．菁优网-jyeoo

【分析】利用商的导数运算法则求出函数的导函数，得到选项．

【解答】解：∵菁优网-jyeoo，

∴菁优网-jyeoo

=菁优网-jyeoo，

故选B．

【点评】本题考查两个函数的商的导数运算法则公式．

2．（5分）（2015春•吉林校级期中）函数y=f（x），x∈（a，b），则“f′（x）＞0”是“函数y=f（x）为增函数”的（　　）

A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

【分析】根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可．

【解答】解：根据导数的性质可知若f′（x）＞0，则函数y=f（x）为增函数成立．

函数f（x）=x3在（﹣1，1）是增函数，但f′（x）=3x2≥0，则f′（x）＞0不一定成立，

故“f′（x）＞0”是“函数y=f（x）为增函数”的充分不必要条件，

故选：A．

【点评】本题主要考查充分条件和必要条件的判断，根据函数单调性和导数之间的关系是解决本题的关键．

3．（5分）（2006•辽宁）曲线菁优网-jyeoo与曲线菁优网-jyeoo的（　　）

A．焦距相等 B．离心率相等 C．焦点相同 D．准线相同

【分析】根曲线的方程可知前者为椭圆，后者为双曲线，排除B；前者焦点在x轴，后者焦点在y轴，排除CD，答案可知．

【解答】解：由菁优网-jyeoo知该方程表示焦点在x轴上的椭圆，

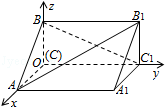
由菁优网-jyeoo知该方程表示焦点在y轴上的双曲线，排除C，D；

椭圆的离心率小于1，双曲线离心率大于1排除B，

故选A

【点评】本题考查了椭圆和双曲线方程及各参数的几何意义，同时着重考查了审题能力即参数范围对该题的影响

4．（5分）（2012•陕西）如图，在空间直角坐标系中有直三棱柱ABC﹣A1B1C1，CA=CC1=2CB，则直线BC1与直线AB1夹角的余弦值为（　　）



A．菁优网-jyeoo B．菁优网-jyeoo C．菁优网-jyeoo D．菁优网-jyeoo

【分析】根据题意可设CB=1，CA=CC1=2，分别以CA、CC1、CB为x轴、y轴和z轴建立如图坐标系，得到A、B、B1、C1四个点的坐标，从而得到向量菁优网-jyeoo与菁优网-jyeoo的坐标，根据异面直线所成的角的定义，结合空间两个向量数量积的坐标公式，可以算出直线BC1与直线AB1夹角的余弦值．

【解答】解：分别以CA、CC1、CB为x轴、y轴和z轴建立如图坐标系，

∵CA=CC1=2CB，∴可设CB=1，CA=CC1=2

∴A（2，0，0），B（0，0，1），B1（0，2，1），C1（0，2，0）

∴菁优网-jyeoo=（0，2，﹣1），菁优网-jyeoo=（﹣2，2，1）

可得菁优网-jyeoo•菁优网-jyeoo=0×（﹣2）+2×2+（﹣1）×1=3，且菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo=3，

向量菁优网-jyeoo与菁优网-jyeoo所成的角（或其补角）就是直线BC1与直线AB1夹角，

设直线BC1与直线AB1夹角为θ，则cosθ=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo

故选A

【点评】本题给出一个特殊的直三棱柱，求位于两个侧面的面对角线所成角的余弦之值，着重考查了空间向量的坐标运算和异面直线及其所成的角的概论，属于基础题．

5．（5分）（2015春•吉林校级期中）函数f（x）=ex﹣ex在[0，2]上的最大值为（　　）

A．0 B．1 C．e﹣2 D．e（e﹣2）

【分析】先求出函数f（x）的导数，得到函数的单调区间，从而求出函数的最大值．

【解答】解：f′（x）=ex﹣e，

令f′（x）＞0，解得：x＞1，

令f′（x）＜0，解得：0≤x＜1，

∴函数f（x）在[0，1）递减，在（1，2]递增，

∴函数f（x）的最大值是f（0）或f（2），

而f（0）=1＜f（2）=e2﹣2e=e（e﹣2），

故选：D．

【点评】本题考查了函数的单调性、函数的最值问题，考查导数的应用，是一道基础题．

6．（5分）（2010•福建）若点O和点F分别为椭圆菁优网-jyeoo的中心和左焦点，点P为椭圆上的任意一点，则菁优网-jyeoo的最大值为（　　）

A．2 B．3 C．6 D．8

【分析】先求出左焦点坐标F，设P（x0，y0），根据P（x0，y0）在椭圆上可得到x0、y0的关系式，表示出向量菁优网-jyeoo、菁优网-jyeoo，根据数量积的运算将x0、y0的关系式代入组成二次函数进而可确定答案．

【解答】解：由题意，F（﹣1，0），设点P（x0，y0），则有菁优网-jyeoo，解得菁优网-jyeoo，

因为菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo，

所以菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，

此二次函数对应的抛物线的对称轴为x0=﹣2，

因为﹣2≤x0≤2，所以当x0=2时，菁优网-jyeoo取得最大值菁优网-jyeoo，

故选C．

【点评】本题考查椭圆的方程、几何性质、平面向量的数量积的坐标运算、二次函数的单调性与最值等，考查了同学们对基础知识的熟练程序以及知识的综合应用能力、运算能力．

7．（5分）（2015春•洛阳期末）定义在R上的函数f（x）满足f（1）=1，且对任意x∈R都有f′（x）菁优网-jyeoo，则不等式f（x2）＞菁优网-jyeoo的解集为（　　）

A．（1，2） B．（0，1） C．（1，+∞） D．（﹣1，1）

【分析】所求解的不等式是抽象不等式，是与函数有关的不等式，函数的单调性和不等关系最密切．由f′（x）菁优网-jyeoo，构造单调递减函数h（x）=f（x）﹣菁优网-jyeoo，利用其单减性求解．

【解答】解：∵f′（x）菁优网-jyeoo，

∴f′（x）﹣菁优网-jyeoo＜0，

设h（x）=f（x）﹣菁优网-jyeoo，则h′（x）=f′（x）﹣菁优网-jyeoo＜0，

∴h（x）是R上的减函数，且h（1）=f（1）﹣菁优网-jyeoo=1﹣菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo．

不等式f（x2）＞菁优网-jyeoo，

即为f（x2）菁优网-jyeoox2＞菁优网-jyeoo，

即h（x2）＞h（1），

得x2＜1，解得﹣1＜x＜1，

∴原不等式的解集为（﹣1，1）．

故选：D．

【点评】本题考查抽象不等式求解，关键是利用函数的单调性，根据已知条件和所要解的不等式，找到合适的函数作载体是关键．

8．（5分）（2015春•吉林校级期中）已知点P是抛物线y2=2x上的动点，点P到准线的距离为d，且点P在y轴上的射影是M，点A（菁优网-jyeoo，4），则|PA|+|PM|的最小值是（　　）

A．菁优网-jyeoo B．4 C．菁优网-jyeoo D．5

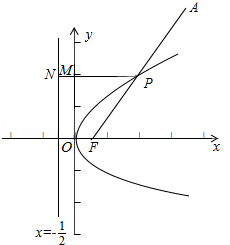
【分析】利用抛物线的定义，推出当A、P、M共线时，|PA|+|PM|取得最小值，由此求得答案．

【解答】解：抛物线焦点F（菁优网-jyeoo，0），准线x=﹣菁优网-jyeoo，延长PM交准线于N，由抛物线定义|PF|=|PN|，

∵|PA|+|PM|+|MN|=|PA|+|PN|=|PA|+|PF|≥|AF|=5，而|MN|=菁优网-jyeoo，∴PA|+|PM|≥5﹣菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，

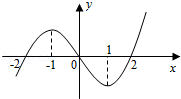
当且仅当A，P，F三点共线时，取“=”号，此时，P位于抛物线上，∴|PA|+|PM|的最小值为：菁优网-jyeoo，

故选：C．



【点评】本题主要考查抛物线的定义、标准方程，以及简单性质的应用，体现了数形结合的数学思想，属于中档题．

9．（5分）（2015•信阳模拟）已知R上可导函数f（x）的图象如图所示，则不等式（x2﹣2x﹣3）f′（x）＞0的解集为（　　）



A．（﹣∞，﹣2）∪（1，+∞） B．（﹣∞，﹣2）∪（1，2）

C．（﹣∞，﹣1）∪（﹣1，0）∪（2，+∞） D．（﹣∞，﹣1）∪（﹣1，1）∪（3，+∞）

【分析】根据题意结合图象求出f′（x）＞0的解集与f′（x）＜0的解集，因此对原不等式进行化简与转化，进而得到原不等式的答案．

【解答】解：由图象可得：当f′（x）＞0时，函数f（x）是增函数，所以f′（x）＞0的解集为（﹣∞，﹣1），（1，+∞），

当f′（x）＜0时，函数f（x）是减函数，所以f′（x）＜0的解集为（﹣1，1）．

所以不等式f′（x）＜0即与不等式（x﹣1）（x+1）＜0的解集相等．

由题意可得：不等式（x2﹣2x﹣3）f′（x）＞0等价于不等式（x﹣3）（x+1）（x+1）（x﹣1）＞0，

所以原不等式的解集为（﹣∞，﹣1）∪（﹣1，1）∪（3，+∞），

故选D．

【点评】解决此类问题的关键是熟悉函数的单调性与导数的关系，以及掌握读图与识图的技巧再结合不等式的解法即可得到答案．

10．（5分）（2014秋•宜城市校级期中）己知定义在实数集R上的函数f（x）满足：

①f（2﹣x）=f（x）；②f（x+2）=f（x﹣2）；③当x1，x2∈[1，3]时，菁优网-jyeoo＞0，

则f（2014）、f（2015）、f（2016）满足（　　）

A．f（2014）＞f（2015）＞f（2016） B．f（2016）＞f（2015）＞f（2014）

C．f（2016）=f（2014）＞f（2015） D．f（2016）=f（2014）＜f（2015）

【分析】①给出了函数的对称轴；②给出了周期；③确定了单调性，据此可以将给的函数值进行转化，最终变成[1，3]内的函数值再进行比较．

【解答】解：因为f（2﹣x）=f（x），所以该函数的对称轴为x=菁优网-jyeoo，

由f（x+2）=f（x﹣2），令t=x﹣2，代入原式得f（t+4）=f（t），所以该函数周期为4，

因为当x1，x2∈[1，3]时，菁优网-jyeoo＞0，所以该函数在[1，3]上是增函数．

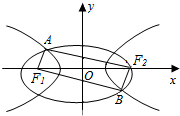
则f（2014）=f（4×503+2）=f（2），f（2015）=f（4×503+3）=f（3），f（2016）=f（4×504）=f（0）=f（2﹣0）=f（2）．

所以f（2014）=f（2016）=f（2）＜f（3）=f（2015），

故选：D．

【点评】正确理解给的三个条件所体现的函数性质是解题的关键，注意化归思想在本题中应用．

11．（5分）（2013•浙江）如图F1、F2是椭圆C1：菁优网-jyeoo+y2=1与双曲线C2的公共焦点，A、B分别是C1、C2在第二、四象限的公共点，若四边形AF1BF2为矩形，则C2的离心率是（　　）



A．菁优网-jyeoo B．菁优网-jyeoo C．菁优网-jyeoo D．菁优网-jyeoo

【分析】不妨设|AF1|=x，|AF2|=y，依题意菁优网-jyeoo，解此方程组可求得x，y的值，利用双曲线的定义及性质即可求得C2的离心率．

【解答】解：设|AF1|=x，|AF2|=y，∵点A为椭圆C1：菁优网-jyeoo+y2=1上的点，

∴2a=4，b=1，c=菁优网-jyeoo；

∴|AF1|+|AF2|=2a=4，即x+y=4；①

又四边形AF1BF2为矩形，

∴菁优网-jyeoo+菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo，即x2+y2=（2c）2=菁优网-jyeoo=12，②

由①②得：菁优网-jyeoo，解得x=2﹣菁优网-jyeoo，y=2+菁优网-jyeoo，设双曲线C2的实轴长为2m，焦距为2n，

则2m=|AF2|﹣|AF1|=y﹣x=2菁优网-jyeoo，2n=2c=2菁优网-jyeoo，

∴双曲线C2的离心率e=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo．

故选D．

【点评】本题考查椭圆与双曲线的简单性质，求得|AF1|与|AF2|是关键，考查分析与运算能力，属于中档题．

12．（5分）（2016•太原一模）已知函数f（x）=菁优网-jyeoox2+2ax，g（x）=3a2lnx+b，设两曲线y=f（x），y=g（x）有公共点，且在该点处的切线相同，则a∈（0，+∞）时，实数b的最大值是（　　）

A．菁优网-jyeooe菁优网-jyeoo B．菁优网-jyeooe6 C．菁优网-jyeooe6 D．菁优网-jyeooe菁优网-jyeoo

【分析】设公共点为P（x0，y0），分别求出f′（x）和g′（x），由题意可得f′（x0）=g′（x0），列出方程求出解出x0，再由f（x0）=g（x0）得到b关于a的函数，求出函数的导数，由a的范围和导数的符号求出单调区间和极值、最值，即可得到b的最大值．

【解答】解：设曲线y=f（x）与y=g（x）在公共点（x0，y0）处的切线相同，

因为f′（x）=x+2a，g′（x）=菁优网-jyeoo，且f′（x0）=g′（x0），

所以x0+2a=菁优网-jyeoo，化简得菁优网-jyeoo，

解得x0=a或﹣3a，又x0＞0，且a＞0，则x0=a，

因为f（x0）=g（x0），所以菁优网-jyeoo，

则b（a）=菁优网-jyeoo（a＞0），

所以b′（a）=5a﹣3（2alna+a）=2a﹣6alna=2a（1﹣3lna），

由b′（a）=0得，a=菁优网-jyeoo，

所以当0＜a＜菁优网-jyeoo时，b′（a）＞0；当a＞菁优网-jyeoo时，b′（a）＜0，

即b（a）在（0，菁优网-jyeoo）上单调递增，b（a）在（菁优网-jyeoo，+∞）上单调递减，

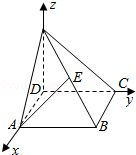
所以当a=菁优网-jyeoo时，实数b的取到极大值也是最大值b（菁优网-jyeoo）=菁优网-jyeoo．

故选：A．

【点评】本题考查利用导数研究曲线上某点切线方程，函数的单调区间、极值和最值，以及对数不等式的解法，考查运算求解能力，属于中档题．

**二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．）**

13．（5分）（2015秋•辽宁校级期末）如图所示，PD垂直于正方形ABCD所在平面，AB=2，E为PB的中点，cos＜菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo＞=菁优网-jyeoo，若以DA，DC，DP所在直线分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，则点E的坐标为　（1，1，1）　．



【分析】设PD=a（a＞0），确定菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo的坐标，利用数量积公式，即可确定E的坐标．

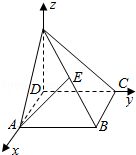
【解答】解：设PD=a（a＞0），则A（2，0，0），B（2，2，0），P（0，0，a），E（1，1，菁优网-jyeoo），

∴菁优网-jyeoo=（0，0，a），菁优网-jyeoo=（﹣1，1，菁优网-jyeoo），

∵cos＜菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo＞=菁优网-jyeoo，∴菁优网-jyeoo=a菁优网-jyeoo•菁优网-jyeoo，∴a=2．

∴E的坐标为（1，1，1）．

故答案为：（1，1，1）



【点评】本题考查空间直角坐标系，考查向量的数量积公式，考查学生的计算能力，属于中档题．

14．（5分）（2015春•吉林校级期中）已知F1，F2是椭圆的两焦点，P为椭圆上一点，若∠F1PF2=60°，则离心率e的范围是　菁优网-jyeoo　．

【分析】由题意，可设|PF1|=m，|PF2|=n． 在△PF1F2中，由余弦定理可知，4c2=m2+n2﹣2mncos60°．再由定义得出m+n=2a，然后进行恒等变形，将4c2=m2+n2﹣2mncos60°量m，n用a，c表示出来即可得出离心率的取值范围

【解答】解：设椭圆方程为菁优网-jyeoo（a＞b＞0），|PF1|=m，|PF2|=n．

在△PF1F2中，由余弦定理可知，4c2=m2+n2﹣2mncos60°．

∵m+n=2a，∴m2+n2=（m+n）2﹣2mn=4a2﹣2mn，

∴4c2=4a2﹣3mn．即3mn=4a2﹣4c2．

又mn≤菁优网-jyeoo=a2（当且仅当m=n时取等号），

∴4a2﹣4c2≤3a2，∴菁优网-jyeoo，即e≥菁优网-jyeoo．

∴e的取值范围是[菁优网-jyeoo，1）．

故答案为菁优网-jyeoo

【点评】本题考查椭圆的简单性质，解答的关键在 在△PF1F2中，利用余弦定理建立方程，再利用基本不等式得到关于a，c的不等式，本题综合性强，难度中等

15．（5分）（2015春•吉林校级期中）函数f（x）=lnx﹣x﹣a有两个不同的零点，则实数a的取值范围是　（﹣∞，﹣1）　．

【分析】令g（x）=lnx，h（x）=x+a，将零点问题转化为交点问题，分别画出图象，先求出直线y=x+a，与曲线y=lnx相切时a的值，即而到到图象有两个交点时a的范围．

【解答】解：函数f（x）=lnx﹣x﹣a有两个不同的零点，

∴f（x）=lnx﹣x﹣a=0有两个不同的根，

∴lnx=x+a，

令g（x）=lnx，h（x）=x+a，

在同一坐标系中画出两个函数的图象，如图，

当直线y=x+a，与曲线y=lnx相切时，设切点为（x0，x0+a），

∴k=1=g′（x0）=菁优网-jyeoo

∴x0=1，

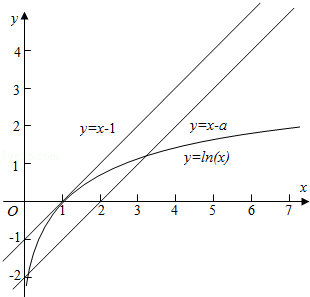
∴g（x0）=0=1+a，

∴a=﹣1，

故当a＜﹣1函数g（x），h（x）的图象有两个不同的交点，

实数a的取值范围为（﹣∞，﹣1）．

故答案为：（﹣∞，﹣1）．



【点评】本题考察了函数的零点问题，渗透了转化思想，关键是求出直线和曲线相切时参数的值，考查数形结合思想，属于中档题．

16．（5分）（2015春•吉林校级期中）已知定义在R上的偶函数g（x）满足：当x≠0时，xg′（x）＜0（其中g′（x）为函数g（x）的导函数）；定义在R上的奇函数f（x）满足：f（x+2）=﹣f（x），在区间[0，1]上为单调递增函数，且函数y=f（x）在x=﹣5处的切线方程为y=﹣6．若关于x的不等式g[f（x）]≥g（a2﹣a+4）对x∈[6，10]恒成立，则a的取值范围是　a≤﹣1或a≥2　．

【分析】根据“xg′（x）＜0”和导数与函数单调性的关系，判断出函数g（x）的单调性，再将“g[f（x）]≥g（a2﹣a+4）对x∈[6，10]恒成立”，转化为“|f（x）|≤|a2﹣a+4|对x∈[6，10]恒成立”，再由条件求出函数f（x）的周期、对称轴以及f（﹣5）的值，再得f（﹣1）、f（1）、f（3）的值，再由这些性质画出大致图象，右图象求出函数f（x）在[6，10]上的值域，从而求出最大值，列出关于a的不等式求解即可．

【解答】解：∵当x≠0时，xg′（x）＜0，

∴当x＞0时，g′（x）＜0，当x＜0时，g′（x）＞0，

即g（x）在（﹣∞，0）上递增，在（0，+∞）上递减，

∵不等式g[f（x）]≥g（a2﹣a+4）对x∈[6，10]恒成立，

∴|f（x）|≤|a2﹣a+4|对x∈[6，10]恒成立，

由f（x+2）=﹣f（x）得，f（x+4）=﹣f（x+2）=f（x），

则函数f（x）是以4为周期的周期函数，

又∵f（x）是R上的奇函数，

∴f（x+2）=﹣f（x）=f（﹣x），

则函数f（x）的对称轴是x=1，

∵在x=﹣5处的切线方程为y=﹣6，

∴f（﹣5）=﹣6，即f（﹣1）=f（3）=﹣6，f（1）=6，

再结合f（x）在区间[0，1]上为单调递增函数，且f（0）=0，画出大致图象：

由上图得，当x∈[6，10]时，f（x）∈[﹣6，6]，

由|f（x）|≤|a2﹣a+4|对x∈[6，10]恒成立，

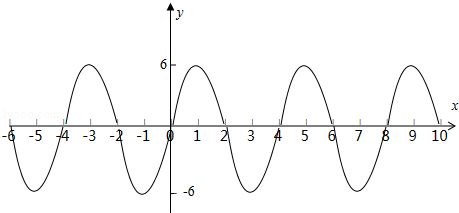
得6≤|a2﹣a+4|，

即a2﹣a+4≥6或a2﹣a+4≤﹣6，

化简得a2﹣a﹣2≥0或a2﹣a+10≤0，

解得a≤﹣1或a≥2，

故答案为：a≤﹣1或a≥2．



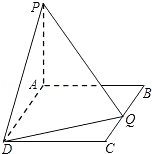
【点评】本题主要考查有关函数性质的综合题，考查了导数与函数单调性的关系，函数的奇偶性与单调性关系、对称性、周期性等，考查了转化思想和数形结合思想，难度较大．

**三.解答题：（本大题共6道小题，共70分．）**

17．（10分）（2011•福建模拟）如图，在矩形ABCD中，AB=2，BC=a，又PA⊥平面ABCD，PA=4．

（Ⅰ）若在边BC上存在一点Q，使PQ⊥QD，求a的取值范围；

（Ⅱ）当边BC上存在唯一点Q，使PQ⊥QD时，求二面角A﹣PD﹣Q的余弦值．



【分析】解法1：（I）连AQ，设BQ=t，则CQ=a﹣t，解Rt△ABQ，Rt△CDQ，可求出AQ，DQ（均含参数t），在Rt△ADQ中，由勾股定理，我们可以得到一个关于t和a的方程，进而由基本不等式得到a的取值范围；

（Ⅱ）过Q作QM∥CD交AD于M，过M作MN⊥PD于N，连接NQ，则∠MNQ是二面角A﹣PD﹣Q的平面角，解三角形MNQ，即可得到二面角A﹣PD﹣Q的余弦值．

解法2：（I）以菁优网-jyeoo为x、y、z轴建立如图的空间直角坐标系，设Q（t，2，0）（t＞0），可得到向量菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo的坐标（均含参数t），由PQ⊥QD，可得菁优网-jyeoo•菁优网-jyeoo=0，由此可构造一个关于t和a的方程，进而由基本不等式得到a的取值范围；

（II）分别求出平面PQD的法向量和平面PAD的法向量，代入向量夹角公式，即可得到二面角A﹣PD﹣Q的余弦值．

【解答】解：法1：（Ⅰ）如图，连AQ，由于PA⊥平面ABCD，则由PQ⊥QD，必有AQ⊥DQ．（2分）

设BQ=t，则CQ=a﹣t，

在Rt△ABQ中，有AQ=菁优网-jyeoo．

在Rt△CDQ中，有DQ=菁优网-jyeoo．（4分）

在Rt△ADQ中，有AQ2+DQ2=AD2．

即t2+4+（a﹣t）2+4=a2，即t2﹣at+4=0．

∴a=t+菁优网-jyeoo≥4．

故a的取值范围为[4，+∞）．（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当t=2，a=4时，边BC上存在唯一点Q（Q为BC边的中点），使PQ⊥QD．（8分）

过Q作QM∥CD交AD于M，则QM⊥AD．

∵PA⊥平面ABCD，∴PA⊥QM．∴QM⊥平面PAD．

过M作MN⊥PD于N，连接NQ，则QN⊥PD．

∴∠MNQ是二面角A﹣PD﹣Q的平面角．（10分）

在等腰直角三角形PAD中，可求得MN=菁优网-jyeoo，又MQ=2，进而NQ=菁优网-jyeoo．（12分）

∴cos∠MNQ=菁优网-jyeoo．

故二面角A﹣PD﹣Q的余弦值为菁优网-jyeoo（14分）

法2：（Ⅰ）以菁优网-jyeoo为x、y、z轴建立如图的空间直角坐标系，

则B（0，2，0），C（a，2，0），D（a，0，0），

P（0，0，4），（2分）

设Q（t，2，0）（t＞0），则菁优网-jyeoo=（t，2，﹣4），菁优网-jyeoo=（t﹣a，2，0）．（4分）

∵PQ⊥QD，∴菁优网-jyeoo=t（t﹣a）+4=0．

即t2﹣at+4=0．

∴a=t+菁优网-jyeoo≥4．

故a的取值范围为[4，+∞）．（6分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当t=2，a=4时，边BC上存在唯一点Q，使PQ⊥QD．

此时Q（2，2，0），D（4，0，0）．（8分）

设n=（x，y，z）是平面PQD的法向量，

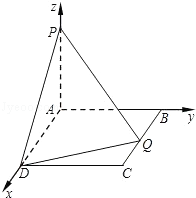
由菁优网-jyeoo，得菁优网-jyeoo．

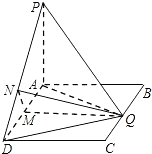
取z=1，则n=（1，1，1）是平面PQD的一个法向量．（10分）

而菁优网-jyeoo是平面PAD的一个法向量，（12分）

由cos＜菁优网-jyeoo．

∴二面角A﹣PD﹣Q的余弦值为菁优网-jyeoo．（14分）





【点评】本题考查的知识点是用空间向量求平面间的，向量语言表述线线的垂直关系，二面角的夹角角及求法，方法一的关键是熟练掌握线线垂直的判定及二面角的平面角的构造方法；方法二的关键是建立空间坐标系，将线线垂直及二面角问题转化为向量夹角问题．

18．（12分）（2015•包头校级模拟）已知函数f（x）=mx﹣菁优网-jyeoo，g（x）=2lnx．

（Ⅰ）当m=1时，判断方程f（x）=g（x）在区间（1，+∞）上有无实根．

（Ⅱ）若x∈（1，e]时，不等式f（x）﹣g（x）＜2恒成立，求实数m的取值范围．

【分析】（Ⅰ）m=1时，令菁优网-jyeoo，求导数，证明h（x）在（0，+∞）上为增函数，利用h（1）=0，可得结论；

（Ⅱ）菁优网-jyeoo恒成立，即m（x2﹣1）＜2x+2xlnx恒成立，又x2﹣1＞0，则当x∈（1，e]时，菁优网-jyeoo恒成立，构造函数菁优网-jyeoo，只需m小于G（x）的最小值．

【解答】解：（Ⅰ）m=1时，令菁优网-jyeoo，…（1分）

菁优网-jyeoo，…（4分）

∴h（x）在（0，+∞）上为增函数…（5分）

又h（1）=0，∴f（x）=g（x）在（1，+∞）内无实数根…（6分）

（Ⅱ）菁优网-jyeoo恒成立，即m（x2﹣1）＜2x+2xlnx恒成立，

又x2﹣1＞0，则当x∈（1，e]时，菁优网-jyeoo恒成立，…（8分）

令菁优网-jyeoo，只需m小于G（x）的最小值，

菁优网-jyeoo，…（10分）

∵1＜x≤e，∴lnx＞0，

∴当x∈（1，e]时，G′（x）＜0，∴G（x）在（1，e]上单调递减，

∴G（x）在（1，e]的最小值为菁优网-jyeoo，

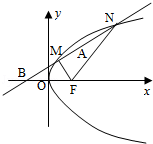
则m的取值范围是菁优网-jyeoo…（12分）

【点评】本题考查导数知识的综合运用，考查函数的单调性，考查恒成立问题，正确分离参数，构造函数求最值是关键．

19．（12分）（2015•合肥一模）如图，M、N是焦点为F的抛物线y2=2px（p＞0）上两个不同的点，且线段MN中点A的横坐标为菁优网-jyeoo，

（1）求|MF|+|NF|的值；

（2）若p=2，直线MN与x轴交于点B点，求点B横坐标的取值范围．



【分析】（1）利用抛物线的定义，求|MF|+|NF|的值；

（2）分类讨论，利用差法，即可求点B横坐标的取值范围．

【解答】解：（1）设M（x1，y1），N（x2，y2），则x1+x2=8﹣p，|MF|=x1+菁优网-jyeoo，|NF|=x2+菁优网-jyeoo，

∴|MF|+|NF|=x1+x2+p=8；

（2）p=2时，y2=4x，

若直线MN斜率不存在，则B（3，0）；

若直线MN斜率存在，设A（3，t）（t≠0），M（x1，y1），N（x2，y2），则

代入利用点差法，可得y12﹣y22=4（x1﹣x2）

∴kMN=菁优网-jyeoo，

∴直线MN的方程为y﹣t=菁优网-jyeoo（x﹣3），

∴B的横坐标为x=3﹣菁优网-jyeoo，

直线MN代入y2=4x，可得y2﹣2ty+2t2﹣12=0

△＞0可得0＜t2＜12，

∴x=3﹣菁优网-jyeoo∈（﹣3，3），

∴点B横坐标的取值范围是（﹣3，3）．

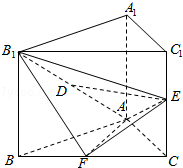
【点评】本题考查抛物线的定义，考查点差法，考查学生分析解决问题的能力，属于中档题．

20．（12分）（2014•兴安盟一模）已知直三棱柱ABC﹣A1B1C1中，△ABC为等腰直角三角形，∠BAC=90°，且AB=AA1，D、E、F分别为B1A、C1C、BC的中点．

（I）求证：DE∥平面ABC；

（Ⅱ）求证：B1F⊥平面AEF；

（Ⅲ）求二面角B1﹣AE﹣F的余弦值．



【分析】建立空间直角坐标系，求出相关向量

（I）要证：DE∥平面ABC，只需证明向量DE与平面ABC的法向量数量积=0即可；

（II）要证：B1F⊥平面AEF，只需证明菁优网-jyeoo=0，菁优网-jyeoo=0即可；

（III）求二面角B1﹣AE﹣F的余弦值，只需求出平面B1AE的法向量为菁优网-jyeoo，

平面AEF的法向量为菁优网-jyeoo，利用数量积确定二面角的余弦值．

也可以用几何法证明：

（I）要证DE∥平面ABC，只需证明DE平行平面ABC内的直线DG（设G是AB的中点，连接DG，）；

（II）求证B1F⊥平面AEF，只需证明B1F垂直平面AEF内的两条相交直线AF、EF即可；

（III）过F做FM⊥AE于点M，连接B1M，说明∠B1MF为二面角B1﹣AE﹣F的平面角，然后求二面角B1﹣AE﹣F的余弦值．

【解答】解：方法1：如图建立空间直角坐标系O﹣xyz，令AB=AA1=4，

则A（0，0，0），E（0，4，2），F（2，2，0），B（4，0，0），

B1（4，0，4），D（2，0，2），（2分）

（I）菁优网-jyeoo=（﹣2，4，0），面ABC的法向量为菁优网-jyeoo=（0，0，4），

∵菁优网-jyeoo，DE⊄平面ABC，

∴DE∥平面ABC．（4分）

（II）菁优网-jyeoo，菁优网-jyeoo

菁优网-jyeoo=0

菁优网-jyeoo=0（6分）

∴菁优网-jyeoo，∴B1F⊥AF

∵AF∩FE=F，∴B1F⊥平面AEF（8分）

（III）平面AEF的法向量为菁优网-jyeoo，设平面B1AE的法向量为菁优网-jyeoo，

∴菁优网-jyeoo，即菁优网-jyeoo（10分）

令x=2，则Z=﹣2，y=1，∴菁优网-jyeoo

∴菁优网-jyeoo=菁优网-jyeoo

∴二面角B1﹣AE﹣F的余弦值为菁优网-jyeoo（12分）

方法2：（I）方法i：设G是AB的中点，连接DG，

则DG平行且等于EC，（2分）

所以四边形DECG是平行四边形，所以DE∥GC，

从而DE∥平面ABC．（4分）

方法ii：连接A1B、A1E，并延长A1E交AC的延长线

于点P，连接BP．由E为C1C的中点，A1C1∥CP，

可证A1E=EP，（2分）

∵D、E是A1B、A1P的中点，∴DE∥BP，

又∵BP⊂平面ABC，DE⊄平面ABC，∴DE∥平面ABC（4分）

（II）∵△ABC为等腰直角三角形，F为BC的中点，

∴BC⊥AF，又∵B1B⊥平面ABC，可证B1F⊥AF，（6分）

设AB=AA1=2，则菁优网-jyeoo

∴B1F⊥EF，∴B1F⊥平面AEF；（8分）

（III）过F做FM⊥AE于点M，连接B1M，

∵B1F⊥平面AEF，由三垂线定理可证B1M⊥AE，

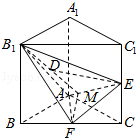
∴∠B1MF为二面角B1﹣AE﹣F的平面角，

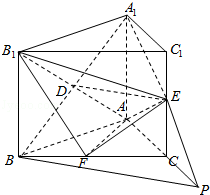
C1C⊥平面ABC，AF⊥FC，可证EF⊥AF，

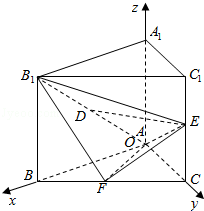
在Rt△AEF中，可求菁优网-jyeoo，（10分）

在Rt△B1FM中，∠B1FM=90°，∴菁优网-jyeoo

∴二面角B1﹣AE﹣F的余弦值为菁优网-jyeoo（12分）





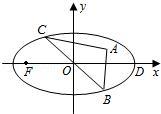


【点评】本题考查直线与平面平行的判定，二面角的求法，直线与平面的垂直的判定，考查逻辑思维能力 空间想象能力，是中档题．

21．（12分）（2009秋•温州校级期末）已知在平面直角坐标系xOy中的一个椭圆，它的中心在原点，左焦点为F（﹣菁优网-jyeoo，0），且右顶点为D（2，0）．设点A的坐标是（1，菁优网-jyeoo）．

（1）求该椭圆的标准方程；

（2）过原点O的直线交椭圆于点B、C，求△ABC面积的最大值．



【分析】（Ⅰ）由左焦点为菁优网-jyeoo，右顶点为D（2，0），得到椭圆的半长轴a，半焦距c，再求得半短轴b，最后由椭圆的焦点在x轴上求得方程．

（2）当BC垂直于x轴时，BC=2，S△ABC=1；当BC不垂直于x轴时，设该直线方程为y=kx，代入椭圆方程，求得B，C的坐标，进而求得弦长|BC|，再求原点到直线的距离，从而可得三角形面积模型，再用基本不等式求其最值．

【解答】解：（Ⅰ）由已知得椭圆的半长轴a=2，半焦距c=菁优网-jyeoo，则半短轴b=1．

又椭圆的焦点在x轴上，

∴椭圆的标准方程为菁优网-jyeoo

（II）当BC垂直于x轴时，BC=2，S△ABC=1

当BC不垂直于x轴时，设该直线方程为y=kx，代入菁优网-jyeoo

解得B（ 菁优网-jyeoo），C（ 菁优网-jyeoo），

则 菁优网-jyeoo，又点A到直线BC的距离d=菁优网-jyeoo，

∴△ABC的面积S△ABC=菁优网-jyeoo

于是S△ABC=菁优网-jyeoo

要使△ABC面积的最大值，则k＜0

由 菁优网-jyeoo≥﹣1，得S△ABC≤菁优网-jyeoo，其中，当k=菁优网-jyeoo时，等号成立．

∴S△ABC的最大值是 菁优网-jyeoo

【点评】本题的考点是直线与圆锥曲线的综合问题，主要考查椭圆的几何性质，考查椭圆的标准方程，考查直线与椭圆的位置关系，求三角形面积的最值，关键是构建模型，利用基本不等式求解．

22．（12分）（2015•南昌校级模拟）已知函数菁优网-jyeoo．

（I）当a=1时，求f（x）在x∈[1，+∞）最小值；

（Ⅱ）若f（x）存在单调递减区间，求a的取值范围；

（Ⅲ）求证：菁优网-jyeoo（n∈N\*）．

【分析】（I）可先求f′（x），从而判断f（x）在x∈[1，+∞）上的单调性，利用其单调性求f（x）在x∈[1，+∞）最小值；

（Ⅱ）求h′（x），可得菁优网-jyeoo，若f（x）存在单调递减区间，需h′（x）＜0有正数解．从而转化为：ax2+2（a﹣1）x+a＜0有x＞0的解．通过对a分

a=0，a＜0与当a＞0三种情况讨论解得a的取值范围；

（Ⅲ）（法一）根据（Ⅰ）的结论，当x＞1时，菁优网-jyeoo⇒菁优网-jyeoo，再构造函数，令菁优网-jyeoo，有菁优网-jyeoo，从而菁优网-jyeoo，问题可解决；

（法二）可用数学归纳法予以证明．当n=1时，ln（n+1）=ln2，3ln2=ln8＞1⇒菁优网-jyeoo，成立；设当n=k时，菁优网-jyeoo，再去证明n=k+1时，菁优网-jyeoo即可（需用好归纳假设）．

【解答】解：（I）菁优网-jyeoo，定义域为（0，+∞）．

∵菁优网-jyeoo，

∴f（x）在（0，+∞）上是增函数．

当x≥1时，f（x）≥f（1）=1； （3分）

（Ⅱ）∵菁优网-jyeoo，

∵若f（x）存在单调递减区间，

∴f′（x）＜0有正数解．即ax2+2（a﹣1）x+a＜0有x＞0的解． （5分）

①当a=0时，明显成立．

②当a＜0时，y=ax2+2（a﹣1）x+a为开口向下的抛物线，ax2+2（a﹣1）x+a＜0总有x＞0的解；

③当a＞0时，y=ax2+2（a﹣1）x+a开口向上的抛物线，

即方程ax2+2（a﹣1）x+a=0有正根．

因为x1x2=1＞0，

所以方程ax2+2（a﹣1）x+a=0有两正根．

菁优网-jyeoo，解得菁优网-jyeoo．

综合①②③知：菁优网-jyeoo． （9分）

（Ⅲ）

（法一）根据（Ⅰ）的结论，当x＞1时，菁优网-jyeoo，即菁优网-jyeoo．

令菁优网-jyeoo，则有菁优网-jyeoo，

∴菁优网-jyeoo．

∵菁优网-jyeoo，

∴菁优网-jyeoo． （12分）

（法二）当n=1时，ln（n+1）=ln2．

∵3ln2=ln8＞1，∴菁优网-jyeoo，即n=1时命题成立．

设当n=k时，命题成立，即 菁优网-jyeoo．

∴n=k+1时，菁优网-jyeoo菁优网-jyeoo．

根据（Ⅰ）的结论，当x＞1时，菁优网-jyeoo，即菁优网-jyeoo．

令菁优网-jyeoo，则有菁优网-jyeoo，

则有菁优网-jyeoo，即n=k+1时命题也成立．

因此，由数学归纳法可知不等式成立． （12分）

【点评】本题考查利用导数研究函数的单调性及数学归纳法，难点之一在于（Ⅱ）中通过求h′（x）后，转化为：ax2+2（a﹣1）x+a＜0有x＞0的解的问题，再用分类讨论思想来解决；难点之二在于（Ⅲ）中法一通过构造函数菁优网-jyeoo，用放缩法证得结论，法二通过数学归纳法，其中也有构造函数的思想，属于难题．