

2020 年沈阳市高中三年级教学质量监测(三)

数学(理科)

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{x \mid (x-1)(x-2) \leq 0\}$, $N = \{x \mid x > 0\}$, 则

A. $N \subseteq M$

B. $M \subseteq N$

C. $M \cap N = \emptyset$

D. $M \cup N = \mathbb{R}$

2. 复数 $z_1 = 2+i$, 若复数 z_1, z_2 在复平面内的对应点关于虚轴对称, 则

$z_1 z_2 =$

A. -5

B. 5

C. $-3+4i$

D. $3-4i$

3. 已知抛物线 $x^2 = 2py$ 上一点 $A(m, 1)$ 到其焦点的距离为 3, 则 $p =$

A. 2

B. -2

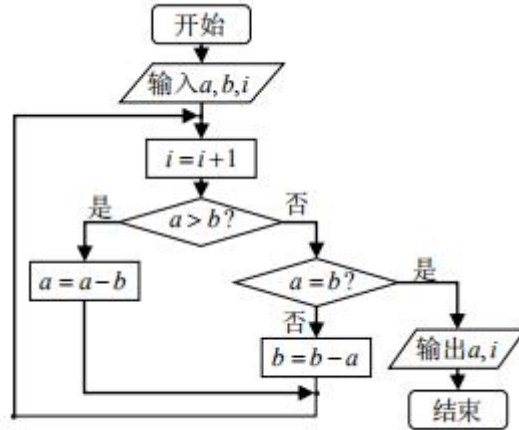
C. 4

D. ± 4

4. 《九章算术》中介绍了一种“更相减损术”, 用于求两个正整数的

最大公约数，将该方法用算法流程图表示如下，若输入 $a=15, b=12, i=0$ ，则输出的结果为

- A. $a=4, i=4$
- B. $a=4, i=5$
- C. $a=3, i=4$
- D. $a=3, i=5$



5. 被誉为“中国现代数学之父”的著名数学家华罗庚先生倡导的“0.618 优选法”在生产和科研实践中得到了非常广泛的应用，0.618 就是黄金分割比 $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值，黄金分割比还可以表示为

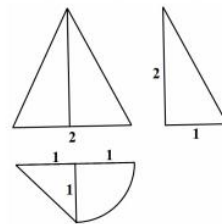
$2\sin 18^\circ$ ，则 $\frac{m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ - 1} =$

- A. 4
- B. 2
- C. $\sqrt{5}+1$
- D. $\sqrt{5}-1$

6. 已知某不规则几何体三视图如图，其中俯视图中的圆弧为 $\frac{1}{4}$ 圆周，则该几何体的侧面积为

A. $4 + \frac{3}{4}\pi$

B. $\frac{7}{2} + \frac{\pi}{2}$



C. $\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{5}}{4}\pi$

D. $\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{5}}{8}\pi$

7. 设函数 $f(x) = \cos^2 x + b \sin x$ ，则“ $b=0$ ”是“ $f(x)$ 的最小正周期为 π ”的

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

8. 2020 年初，新型冠状病毒肺炎在欧洲爆发后，我国第一时间内向相关国家捐助医疗物资，并派出由医疗专家组成的医疗小组奔赴相关国家. 现有四个医疗小组甲、乙、丙、丁，和有 4 个需要援助的国家可供选择，每个医疗小组只去一个国家，设事件 $A =$ “4 个医疗小组去的国家各不相同”，事件 $B =$ “小组甲独自去一个国家”，则 $P(A|B) =$

A. $\frac{2}{9}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{4}{9}$

D. $\frac{5}{9}$

9. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，且 $3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = -5\overrightarrow{OC}$ ，则 $\angle C$ 的值为

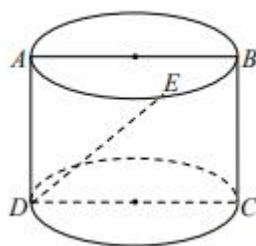
A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

- C. $\frac{\pi}{6}$
 D. $\frac{\pi}{12}$

10. 我们打印用的 A4 纸的长与宽的比约为 $\sqrt{2}$ ，之所以是这个比值，是因为把纸张对折，得到的新纸的长与宽之比仍约为 $\sqrt{2}$ ，纸张的形状不变. 已知圆柱的母线长小于底面圆的直径长(如图所示)，它的轴截面 ABCD 为一张 A4 纸，若点 E 为上底面圆上弧 AB 的中点，则异面直线 DE 与 AB 所成的角约为

- A. $\frac{\pi}{6}$
 B. $\frac{\pi}{4}$
 C. $\frac{\pi}{3}$
 D. $\frac{2}{3}\pi$



11. 已知 x 与 y 之间的几组数据如下表:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 1 | m | n | 4 |

上表数据中 y 的平均值为 2.5，若某同学对 m 赋了三个值分别为 1.5，2，2.5，得到三条线性回归直线方程分别为 $y = b_1x + a_1$ 、 $y = b_2x + a_2$ 、 $y = b_3x + a_3$ ，对应的相关系数分别为 r_1 、 r_2 、 r_3 ，下列结论中错误的是

- A. 三条回归直线有共同交点
 B. 相关系数中， r_2 最大
 C. $b_1 > b_2$
 D. $a_1 > a_2$

参考公式:线性回归方程 $y = \hat{b}x + \hat{a}$ 中,

$$\text{其中 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$$

$$\text{相关系数 } r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

12. 已知函数 $f(x) = x^3 - 4x$, 过点 $A(-2, 0)$ 的直线 l 与 $f(x)$ 的图象有三个不同的交点, 则直线 l 斜率的取值范围为

- A. $(-1, 8)$
- B. $(-1, 8) \cup (8, +\infty)$
- C. $(-2, 8) \cup (8, +\infty)$
- D. $(-1, +\infty)$

第 II 卷(非选择题共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 m 是常数, $(mx - 1)^2 = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + ax + a_0$, 且

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 33$, 则 $m =$ _____

14. 已知 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 若 $f(\log_2 b) = \frac{5}{2}$, 则 $f(\log_b \frac{1}{2}) =$ _____

15. 在平面直角坐标系 xOy 中, F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦

点, 直线 $y = 2b$ 与双曲线交于 B, C 两点, 且 $\angle BFC = 90^\circ$, 则该双曲线的离心率为 _____

16. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S ,

若 $4\sin^2 A = 3\sin^2 B + 2\sin^2 C$, 则 $\frac{S}{AB \cdot AC}$ 的最大值为_____

三、解答题:共 70 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

第 17-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22-23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题:共 60 分

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + pn$, 且 a_4, a_7, a_{12} 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式:

(2) 若 $b_n = \frac{4S_n}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

随着生活节奏的加快以及智能手机的普及, 外卖点餐逐渐成为越来越多用户的餐饮消费习惯, 由此催生了一批外卖点餐平台. 已知某外卖平台的送餐费用与送餐距离有关(该平台只给 5 千米范围内配送), 为调查送餐员的送餐收入, 现从该平台随机抽取 100 名点外卖的用户进行统计, 按送餐距离分类统计结果如下表:

| 送餐距离(千米) | (0, 1] | (1, 2] | (2, 3] | (3, 4] | (4, 5] |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 频数 | 5 | 25 | 25 | 20 | 5 |

以这 100 名用户送餐距离位于各区间的频率代替送餐距离位于该区间的概率.

(1) 若某送餐员一天送餐的总距离为 100 千米, 试估计该送餐员一天

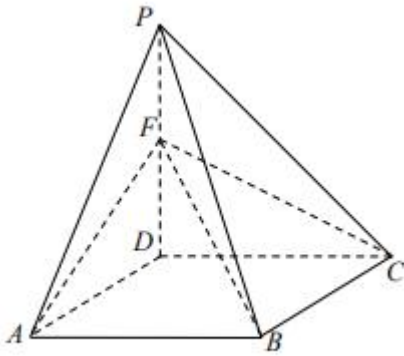
的送餐份数：（四舍五入精确到整数，且同一组中的数据用该组区间的中点值为代表）

(2) 若该外卖平台给送餐员的送餐费用与送餐距离有关，规定 2 千米内为短距离，每份 3 元，2 千米到 4 千米为中距离，每份 7 元，超过 4 千米为远距离，每份 12 元记 X 为送餐员送一份外卖收入（单位：元），求 X 的分布列和数学期望.

19. （本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle DAB = 60^\circ$ ， $AD \perp PD$ ，点 F 为棱 PD 的中点.

- (1) 在棱 BC 上是否存在一点 E ，使得 $CF \parallel$ 平面 PAE ，并说明理由；
- (2) 若 $AC \perp PB$ ，二面角 $D-FC-B$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时，求直线 AF 与平面 BCF 所成的角的正弦值.



20. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$. 四点 $P_1(2, \sqrt{3})$ 、 $P_2(0, \sqrt{2})$ 、 $P_3\left(-2, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 、

$P_4\left(2, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ 中恰有三个点在椭圆 C 上, 左、右焦点分别为 F_1 、 F_2

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过左焦点 F_1 且不平行坐标轴的直线 l 交椭圆于 P 、 Q 两点, 若 PQ 的中点为 N , O 为原点, 直线 ON 交直线 $x=-3$ 于点 M , 求 $\frac{|PQ|}{|MF_1|}$ 的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^{bx}}{ax}$ 在 $x=2$ 处取到极值为 $\frac{e}{2}$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若不等式 $x^2 f(x) \geq kx + \ln x + 1$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 k 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分, 请考生在 22、23 题中任选一题作答, 如果多做则按所做的第一题计分

22. 【选修 4-4 坐标系与参数方程】(本小题满分 10 分)

在直角坐标系 xOy 中, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta = 2$.

(1) M 为曲线 C_1 上的动点, 点 P 在线段 OM 上, 且满足 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} = -4$, 求点 P 的轨迹 C_2 的直角坐标方程:

(2) 曲线 C_2 上两点 $A(\rho_1, \frac{\pi}{3})$ 与点 $B(\rho_2, \alpha)$, 求 $\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. 【选修 4-5: 不等式选讲】(本小题满分 10 分)

已知 a, b, c 均为正数，设函数 $f(x) = |x-b| - |x+c| + a$, $x \in \mathbb{R}$.

(1) 若 $a = 2b = 2c = 2$, 求不等式 $f(x) < 3$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最大值为 1, 证明: $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} + \frac{9}{c} \geq 36$