2020年沈阳市高中三年级教学质量监测(三)

数学(理科)【答案与评分标准】

第Ⅰ卷(选择题共60分)

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	A	C	D	B	C
题号	7	8	9	10	11	12
答案	C	A	A	C	D	B

第Ⅱ卷(非选择题共90分)

二、填空题:

13. 3

14. $-\frac{5}{2}$

15. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

16. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

三、解答题:

17. (本小题满分12分)

(1)当n=1时，$a_1=S_1=1+p$，

当n≥2时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2n-1+p$，

当n=1时，$a_1=1+p$也满足上式，故$a_n=2n-1+p$,

$\because a_4$、a_7、a_{12}成等比数列

$\therefore a_4 a_{12} = a_7^2$

$\therefore .(7+p)(23+p) = (13+p)^2$

$\therefore$ p=2

$\therefore a_n = 2n+1$

(2)由(1)可 $b_n = \dfrac{4S_n}{a_n a_{n+1}} = \dfrac{4n^2+8n}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{4n^2+8n}{4n^2+8n+3} = 1 - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\right)$

$\therefore .T_n = n - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\right) = n - \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4n+6} = \dfrac{2n^2+2n}{2n+3}$

18. (本小题满分 12 分)

(1)估计每名外卖用户的平均送餐距离为:

0.5×0.15+1.5×0.25 +2.5×0.25+3.5×0.2 +4.5×0.15 = 2.45

所以送餐距离为 100 千米时，送餐份数为:100÷2.45≈41 份

(2)由题意知 X 的可能取值为: 3，7，12

$P(X=3) = \dfrac{40}{100} = \dfrac{2}{5}$

$P(X=7) = \dfrac{45}{100} = \dfrac{9}{20}$

$P(x=12) = \dfrac{15}{100} = \dfrac{3}{20}$

所以 X 的分布列为:

X	3	7	12
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{9}{20}$	$\dfrac{3}{20}$

$\therefore E(X) = 3\times\dfrac{2}{5} + 7\times\dfrac{9}{20} + 12\times\dfrac{3}{20} = 6.15$

19. (本小题满分 12 分)

(1)在棱 BC 上存在点 E，使得 CF //平面 PAE,点 E 为棱 BC 的中点

证明:取 PA 的中点 Q，连结 EQ、FQ,

由题意，FQ//AD 且 FQ=$\frac{1}{2}$AD ,

CE// AD 且 CE=二 AD,

故 CE//FQ 且 CE=FQ.

$\therefore$四边形 CEQF 为平行四边形.

$\therefore$CF//EQ，又 CF$\not\subset$平面 PAE,

$\therefore$CF//平面 PAE

(2)菱形 ABCD 中，AC$\perp$BD，又 AC$\perp$PB，PB$\cap$BD=B.

$\therefore$AC$\perp$平面 PBD，又 PD$\subset$面 PBD

$\therefore$AC$\perp$PD,

$\because$AD$\perp$PD，AC$\cap$AD=A

$\therefore$PD$\perp$平面 ABCD.

取 AB 中点为 M,则 DM$\perp$AB.

以 D 为原点，DM，DC，DP 为 x，y，z 轴建立如图空间直角坐标系，

设 FD=a,则由题意知：

D(0,0,0)，F(0,0,a)，C(0,2,0)，B($\sqrt{3}$,1,0)，A($\sqrt{3}$,-1,0).

$\overrightarrow{FC}$=(0,2,-a)，$\overrightarrow{CB}$=($\sqrt{3}$,-1,0)，

设平面 FBC 的法向量为$\vec{m}$=(x,y,z),则由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{FC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$得$\begin{cases}2y-az=0\\ \sqrt{3}x-y=0\end{cases}$

令 x=1,则 y=$\sqrt{3}$，z=$\frac{2\sqrt{3}}{a}$ 所以取$\vec{m}$ = $\left(1,\sqrt{3},\frac{2\sqrt{3}}{a}\right)$

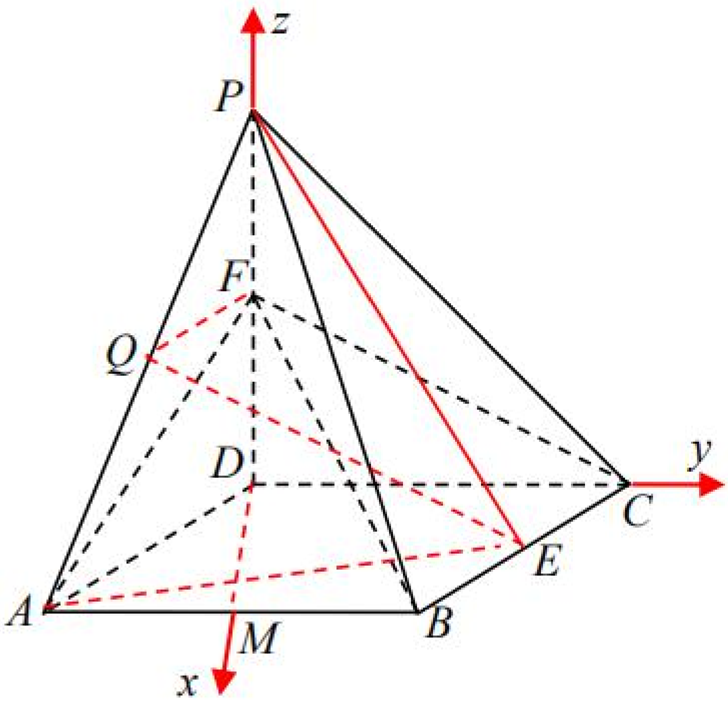
显然可取平面 DFC 的法向量$\vec{n}=(1,0,0)$，

由题意：$\frac{\sqrt{6}}{6}=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{1}{\sqrt{1+3+\frac{12}{a^2}}}$，所以 a=$\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{FA}=(\sqrt{3},-1,-\sqrt{6})$，

设直线 AF 与平面 BCF 所成的角为θ,

则 $\sin\theta$ = $|\cos<\vec{m},\overrightarrow{FA}>|=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$



20. （本小题满分 12 分）

解：（1） 易知$P_3\left(-2,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)P_4\left(2,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$关于 y 轴对称，一定都在椭圆上

所以$P_1\left(2,\sqrt{3}\right)$一定不在椭圆上. 根据题意$P_2\left(0,\sqrt{2}\right)$也在椭圆上.

将$P_2\left(0,\sqrt{2}\right)$, $P_4\left(2,\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, 带入椭圆方程，解得椭圆方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

(2)设直线l方程为 y=k(x+2) (k≠0)，P(x_1，y_1)，Q(x_2，y_2)，

联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}$，可得$(3k^2+1)x^2+12k^2x+12k^2-6=0$.

则△=24(k^2+1)>0，且$x_1+x_2=-\dfrac{12k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{12k^2-6}{3k^2+1}$

设PQ的中点N(x_0，y_0)，则$x_0=\dfrac{x_1+x_2}{2}=-\dfrac{6k^2}{3k^2+1}, y_0=k(-\dfrac{6k^2}{3k^2+1}+2)=\dfrac{2k}{3k^2+1}$

∴N坐标为$(-\dfrac{6k^2}{3k^2+1},\dfrac{2k}{3k^2+1})$

$|PQ|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{k^2+1}}{3k^2+1}=\dfrac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$

因此直线ON的方程为 y=$-\dfrac{1}{3k}$x，从而点M为(−3, $\dfrac{1}{k}$)，又F_1(−2, 0)，

$|MF_1|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}$

$\dfrac{|PQ|^2}{|MF_1|^2}=\dfrac{24k^2\left(k^2+1\right)}{(3k^2+1)^2}$

令 u=3k^2+1≥1,

则$h(u)=8\dfrac{(u-1)(u+2)}{3u^2}=-\dfrac{16}{3}(\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{2u}-\dfrac{1}{2})=-\dfrac{16}{3}[(\dfrac{1}{u}-\dfrac{1}{4})^2-\dfrac{9}{16}]$

因此当 u=4，即 k=±1 时 h(u)最大值为 3.

所以$\dfrac{|PQ|}{|MF_1|}$取得最大值$\sqrt{3}$.

21. (本小题满分 12 分)

(1)由已知定义域为{x∈R|x≠0}，$f'(x)=\dfrac{(abx-a)e^{bx}}{(ax)^2}$

由$f'(2)=\frac{(2ab-a)e^{2b}}{(2a)^2}=0$，又 a≠0, 得 b=$\frac{1}{2}$

$f(2)=\frac{e^{2b}}{2a}=\frac{e}{2a}=\frac{e}{2}$

所以 a=1,

从而$f'(x)=\frac{(\frac{x}{2}-1)e^{\frac{x}{2}}}{x^2}$

又 x≠0, 由f’(x)>0 得：x>2

由f’ (x)<0 得：x<0 或 0<x<2.

故f(x)的单调递减区间是：(-∞, 0)和(0, 2)

单调递增区间是：(2, +∞)

(2)等价于$e^{\frac{x}{2}}-\frac{\ln x+1}{x}\geq k$在 x∈(0, +∞)上恒成立，

令$g(x)=e^{\frac{x}{2}}-\frac{\ln x+1}{x}$（x>0），则只需 k≤[g(x)]min 即可.

$g'(x)=\frac{\frac{1}{2}x^2e^{\frac{x_0}{2}}+\ln x}{x^2}$

令$h(x)=\frac{1}{2}x^2e^{\frac{x_0}{2}}+\ln x(x>0)$

则$h'(x)=(x+\frac{1}{4}x^2)e^{\frac{x_0}{2}}+\frac{1}{x}>0$

所以 h(x)在 x∈(0, +∞)上单调递增，

又$h(\frac{1}{2})=\frac{\sqrt[4]{e}}{8}-\ln 2<0$, $h(1)=\frac{\sqrt{e}}{2}>0$

所以有唯一的零点 x。∈($\frac{1}{2}$, 1)，h(x)在 x∈($\frac{1}{2}$, x_0)上单调递减，

在 x∈(x_0, 1)上单调递增

因为 $\frac{x_0^2}{2}e^{\frac{x_0}{2}}+\ln x_0=0$，两边同时取自然对数，则有 $\frac{x_0}{2}+\ln\frac{x_0}{2}+\ln x_0=\ln(-\ln x_0)$

即 $\frac{x_0}{2}+\ln\frac{x_0}{2}=-\ln x_0+\ln(-\ln x_0)$

构造函数 m(x)=x+lnx(x>0)，则 m'(x)=1+$\frac{1}{x}$>0,

所以函数 m(x)在 x∈(0,+∞)上单调递增，

又 $m(\frac{x_0}{2})=m(-\ln x_0)$，所以当 $\frac{x0}{2}=-\ln x_0$，即 $e^{\frac{x_0}{2}}=\frac{1}{x_0}$.

所以 $g(x)\geq g(x_0)=e^{\frac{x_0}{2}}-\frac{\ln x_0+1}{x_0}=\frac{1}{x_0}-\frac{-\frac{x_0}{2}+1}{x_0}=\frac{1}{2}$

即 $[g(x)]\min=\frac{1}{2}$

于是实数 k 的取值范围是(-, $\frac{1}{2}$].

(二)选考题:

22. 【选修 4-4 坐标系与参数方程】（本小题满分 10 分）

解:（1）设 P 的极坐标为(ρ，θ)（ρ>0)，M 的极坐标为(ρ_0，θ)（ρ_0>0).

由题设知|PO|=ρ，|OM|=$\rho_0=\frac{2}{\sin\theta}$

由 $\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OM}=|\overrightarrow{PO}||\overrightarrow{OM}|\cos\pi=-|\overrightarrow{PO}|\overrightarrow{OM}|=-4$

得 $\frac{2\rho}{\sin\theta}=4$

所以 C_2 的极坐标方程 $\rho=2\sin\theta\,(\rho>0)$,

因此 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1\,(y\neq0)$.

(2)依题意: |OA|=ρ_1=2sin$\frac{\pi}{3}$，|OB|=ρ_2=2sinα.

于是△OAB 面积：S=$\frac{1}{2}$|OA||OB|sin∠AOB

$=\sqrt{3}\sin\alpha\,|\sin(\alpha-\frac{\pi}{3})|=\frac{\sqrt{3}}{2}|\sin(2\alpha+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}|$

当$\alpha=\frac{2\pi}{3}$时，S 取得最大值$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

所以△OAB 面积的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$

23. 【选修 4-5：不等式选讲】（本小题满分 10 分）

解：(1)当 a=2b=2c=2 时，不等式f(x)<3 化为：

|x-1|-|x+1|<1

当 x≤-1 时，原不等式化为 1-x+1+x<1,解集为ϕ

当-1<x<1 时，原不等式化为 1-x-x-1<1，解得-$\frac{1}{2}$<x<1

当 x≥1 时，原不等式化为 x-1-x-1<1,解得 x≥1

∴不等式 f(x)<3 的解集为$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)因为 f(x)=|x-b|-|x+c|+a≤|(x+c)-(x-b)|+a=|b+c|+a,

又因为 a,b,c>0,所以$f(\mathrm{x})_{\max}=\mathrm{a}+\mathrm{b}+\mathrm{c}=2$.

方法一:

$$(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c})(a+b+c)=14+(\frac{b}{a}+\frac{4a}{b})+(\frac{c}{a}+\frac{9a}{c})+(\frac{4c}{b}+\frac{9b}{c})$$
$$\geq 14+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{9a}{c}}+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{9b}{c}}=36$$
.....9 分

当且仅当$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}且\frac{c}{a}=\frac{9a}{c}且\frac{4c}{b}\cdot\frac{9b}{c}\\ a+b+c=2\end{cases}$，即$\begin{cases}b=2a且c=3a且2c=3b\\ a+b+c=2\end{cases}$

即 a=$\frac{1}{3}$, b=$\frac{2}{3}$, c=1 等号成立.

方法二:

$$(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c})(a+b+c)=[(\frac{1}{\sqrt{a}})^2+(\frac{2}{\sqrt{b}})^2+\left(\frac{3}{\sqrt{c}}\right)^2][(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2]$$

$$\geq(\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}+\frac{2}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}+\frac{3}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c})^2=36$$

当且仅当$\begin{cases}\frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}\\a+b+c=2\end{cases}$，即 a=$\frac{1}{3}$, b=$\frac{2}{3}$, c=1 等号成立.